

Kvadratsætninger og Pascals trekant

Parentesregler

At gange ind:

$$x \cdot (5y + 1) \stackrel{\text{expand}}{=} 5xy + x$$

$$2 \cdot (3x - y) = 6x - 2y$$

Hvorfor gælder det? Det er definitionen på parenteser

At sætte udenfor:

$$x^3 + 2x = x \cdot (x^2 + 2)$$

$$4h^2 - 2h = 2h \cdot (2h - 1)$$

Hvorfor gælder det? Gør prøve fra højre mod venstre.

Udregn:

$$(x - 1) \cdot 7$$

$$(5x + 2) \cdot (2x + 5)$$

Sæt udenfor parentes:

$$3x^2y - 12xy^2 =$$

$$24z^5 - 15z^3 + 3z =$$

Kvadratsætninger

Hvad betyder 7^2 , 5^3 , 10^6 ?

Hvad betyder a^4 , z^{11} , $(y - 2)^2$, $(x + 1)^8$?

Hvad er forskellen på $2x^3$ og $(2x)^3$

Argumenter for de tre kvadratsætninger

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Anvend kvadratsætningerne til at udregne:

$$(z + 7)^2$$

$$(x - 9)^2$$

$$(2x + 3)^2$$

Anvend kvadratsætningerne til at omskrive (fra højre mod venstre:)

$$x^2 - 25 =$$

$$x^2 + 12x + 36 =$$

$$9x^2 - 12x + 4 =$$

Anvend kvadratsætningerne til at udregne følgende som hovedregning:

$$11^2, 15^2$$

$$19^2$$

$$104^2$$

$$98^2$$

$$95 \cdot 105$$

$$52 \cdot 48$$

▼ $(a + b)^n$

Hvordan skal man udregne $(a + b)^3$?

I hånden:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) =$$

Med maple:

$$\text{expand}((a + b)^3)$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(1.3.1)

Vi kan skrive det pålinjen:

$$\text{expand}((a + b)^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Gør det samme med $(a + b)^4$ og med $(a + b)^5$

Stil udtrykkene op under hinanden:

$$\text{expand}((a + b)^2); \text{expand}((a + b)^3); \text{expand}((a + b)^4)$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

(1.3.2)

Hvert enkelt led indeholder et vist antal a'er og b'er (er der ingen b'er siger vi der er 0).

Tallene foran kaldes for koefficienter.

Kan du se et system i koefficienterne?

Prøv at give et bud på, hvad $(a + b)^5$ mon er, uden først at expande.

Når du har et forslag så tjek med expand

▼ Pascals trekant

Her ser du starten på Pascals trekant (ved at lade cursoren glide hen over ser du tabellen bag ved, og ser, hvor du selv kan skrive:)

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
1		4		6		4		1	
	1								1
1									

Rækkerne nummereres oppefra. Den øverste med bare et 1-tal kaldes den 0'te række. Derefter nr 1,2,3 osv

Diagonalerne skråt ned mod venstre nummereres tilsvarende: Den yderste med rene 1-taller er den 0'te. Den næste med 1,2,3,4.. er den første osv.

Det betyder at vi kan nummerere tallene inde i trekanten p_{ij} , hvor i er rækkenummer og j er diagonalnummer - der er det samme som det nummer tallet har i sin række: tallet 6 ovenfor er p_{42} .

- Kan du se systemet i trekanten: Hvordan fremkommer den 4. række fra den tredje?
- Kan du opskrive den 5. række?
- Kan du opskrive den 6. og 7. række?
- Kan du se sammenhængen mellem den 2. række og den ene af kvadratsætningerne?
- Kan du se sammenhængen mellem $(a + b)^3$ og den tredje række?
- Kan du ud fra din udfyldning af Pascals trekant opskrive et udtryk for $(a + b)^7$?

3. række													
4. række													

▼ Sumreglen i Pascals trekant

Vi har set, at vi får række for række nedad ved hjælp af sumreglen, fx fra 3. til 4. række gælder:

3. række	p_{30}	$= 1$	p_{31}	$= 3$	p_{32}	$= 3$	p_{33}	$= 1$					
4. række	$p_{41} = 4$				p_{42}	$= 6$	$p_{43} = 4$						
n'te række			p_{nk}			p_{nk}	$+ 1$						
(n+1)'te række				p_{n+1k+1}									

Læg mærke til, at udregningerne skrevet med symboler er således:

$$1 + 3 = 4 \text{ svarer til at } p_{30} + p_{31} = p_{41}$$

$$3 + 3 = 6 \text{ svarer til at } p_{31} + p_{32} = p_{42}$$

Helt generelt kan vi udtrykke, hvordan vi kommer fra én række, vi kalder række nr. n, til den næste række som så er række nr n+1 ved formlen: $p_{nk} + p_{nk+1} = p_{n+1k+1}$

Vi vil nu argumentere for at de tal der indgår i Pascals trekant bliver koefficienterne til leddene, når vi expander $(a + b)^n$, netop fordi vi har denne sumregel.

Vi vil argumentere ud fra et konkret eksempel, men argumentet kan let ses må gælde generelt: Lad os sige, at vi har undersøgt, at tallene i Pascals trekant er koefficienterne til leddene for $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ osv op til $(a + b)^6$. Vi vil så vise, at detet også er tilfældet for $(a + b)^7$.

Hvis vi expander dette udtryk får vi fx et led med $a^3 \cdot b^4$, og vi vil argumentere for, at koefficienten kan fås som en sum af to koefficienter fra $(a + b)^6$.

Vi skriver:

$$(a + b)^7 = (a + b) \cdot (a + b)^6$$

Leddets $a^3 \cdot b^4$ har hentet a fra 3 af de 7 parenteser, og b fra de reterende 4. Dette kan gøres på mange måder, men vi kan dele det op i to grupper:

1) det ene a kan komme fra den første parentes, og de andre to fra to af de sidste 6 parenteser

2) alle 3 kommer a'er kommer fra de sidste 6 parenteser.

Hor mange er der nu i de to grupper?

1) Hvor mange måder kan vi vælge 2 ud af 6 parenteser? Det svar er jo i den sjette række, og er p_{62}

2) Hvor mange måder kan vi vælge 3 ud af 6 parenteser? Det svar er også i den sjette række, og er p_{63} .

Men så er koefficienten foran $a^3 \cdot b^4$ altså summen af de to tal, og det er jo tallet i Pascals trekant lige under de to:

$$p_{62} + p_{63} = p_{73}$$

Altså er tallene i den 7 række præcis koefficienterne til $(a + b)^7$

▼ Symbolet $\binom{n}{k}$

Når man opdager nye ting i matematik, indfører man ofte nye symboler for det. Tallene i Pascals trekant, som vi ovenfor har betegnet p_{42} osv og generelt p_{nk} har i matematik fået deres helt eget symbol og betegnelse:

p_{42} skrives $\binom{4}{2}$ og læses "4 over 2". Det står jo for koefficienten til leddet $a^2 \cdot b^2$ når vi har ganget $(a + b)^4$ ud, og det angiver fordor: På hvor mange måder kan vi vælge 2 a'er ud af 4 mulige parenteser.

Det er naturligvis indbygget i Maple, hvorfan man regner dette ud:

$$\binom{4}{2} = 6$$

Udregn selv med dette symbol koefficienterne du fandt til 6. række i Pascals trekant.

Koefficienterne $\binom{n}{k}$ kaldes for binomialkoefficienter.

Lad os forestille os, vi har ganget $(a + b)^{50}$ ud. Resultatet vil indeholde alle led af typen $a^k \cdot b^{50-k}$, fx et led med $a^{17} \cdot b^{33}$. Hvad er koefficienten til dette led?

Du kunne jo gange det ud ved expand. Prøv det! Du kan bare fortryde bagefter.

Men svaret er jo også givet ved binomialkoefficienten:

$$\binom{50}{17} = 9847379391150$$

$\binom{50}{17}$ står altså for: På hvor mange måder kan man vælge 17 ud af 50 mulige?

Kan du svare på følgende: Når man spiller kort og anvender 52 blade, så er man ofte 4 spillere, der hver får 13 kort.

På hvor mange forskellige måder kan disse 13 kort vælges?

Hvis man spiller kort hver dag, og måske når 20 spil om dagen, hvor mange gange har man så fået en hånd med 13 kort i løbet af 50 år?

▼ Summen af rækkerne

Udregn summen af de første 5 rækker i Pascals trekant.

Kan du se et mønster.

Række nr 10 kan vi summere således:

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 1024$$

Passer dette ind i dit mønster?

Vælg selv nogle andre og summer dem.

Kan du argumentere for, at dette må være tilfældet?

(Hjælp: Hver koefficient i en række angiver på hvor mange måder vi kan vælge 0 a'er, 1 a, 2 a'er, 3 a'er osv. Hvad får vi så talt sammen når vi lægger alle disse koefficienter sammen? Kan dette udregnes på en anden måde?)

▼ Diagonaler i Pascals trekant

Er der mon et mønster i tallene i diagonalerne? De første to er lette nok.

Men hvad med den tredje? Disse tal kaldes trekantstal? Du kan evt slå op og undersøge hvad det er, og så se om du kan se at det stemmer med diagonalens tal.

Hvad med den fjerde? Disse tal kaldes pyramidetallene? Du kan evt slå op og undersøge hvad det er, og så se om du kan se at det stemmer med diagonalens tal.

Vi gik fra to til tre dimensioner og fortsætter vi på den måde skal vi ud i 4 dimensioner for at finde figurer der passer?

▼ Binomialkoefficienterne og sandsynlighedsregning

Kan du se af ovenstående, hvordan vi nu kan udregne sådan noget som:

- Vi kaster 20 terninger. På hvor mange måder kan vi få 5 seksere? Hvad er sandsynligheden for at vi får 5 seksere?

Dette vil vi vende tilbage til i nogle lektioner om sandsynlighedsregning.